2. Tribus et Mesures - Suite

Exercice 1. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable (i.e. pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$). Montrer que, si $\mu(E) \neq 0$ (resp. $\mu(\{f \neq 0\}) \neq 0$), alors il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) > 0$ et f soit bornée sur A (resp. $|f|$ minorée par une constante strictement positive sur A).

Exercice 2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : x \in \mathbb{R} \mapsto ax + b$. Montrer que $f(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\lambda(f(A)) = |a|\lambda(A)$.

Exercice 3 (Tribu complétée)**.** Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Une partie $N \in \mathcal{P}(E)$ est dite μ-négligeable s'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$. Notons $\mathcal{N}$ l'ensemble des μ-négligeables, et $\mathcal{C} = \{A \cup N,\ (A, N) \in \mathcal{A} \times \mathcal{N}\}$. Justifier que :

$$C \in \mathcal{C} \iff \exists A, B \in \mathcal{A},\ A \subset C \subset B \ \text{ et } \ \mu(B \backslash A) = 0.$$

Montrer que $\mathcal{C}$ est une tribu. Pour $C \in \mathcal{C}$, on définit $\overline{\mu}$ par $\overline{\mu}(C) = \mu(A)$ si $A \subset C \subset B$ avec $\mu(B \backslash A) = 0$. Montrer que $\overline{\mu}$ est une mesure sur $\mathcal{C}$, qui coïncide avec μ sur $\mathcal{A}$.

Exercice 4. Déterminer $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ de mesure de Lebesgue nulle, tels que $A + B = \mathbb{R}$.

Exercice 5. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un fermé F d'intérieur vide tel que $\lambda(A \cap F) \geq \lambda(A) - \varepsilon$, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 6. Soit (X, d) un espace métrique. Soit μ une mesure finie sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(X)$. Montrer que tout borélien A de X vérifie la propriété de régularité suivante :

$$\mu(A) = \inf\{\mu(\Omega),\ A \subset \Omega,\ \Omega \text{ ouvert}\} = \sup\{\mu(F),\ F \subset A,\ F \text{ fermé}\}.$$

On dit que la mesure μ est régulière. (Ainsi, toute mesure finie sur un espace métrique est régulière.)

Exercice 7. Soit E un ensemble non dénombrable muni de la tribu

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R});\ A \text{ dénombrable ou } A^c \text{ dénombrable}\}$$

et de la mesure de l'exercice 2.7.
Justifier que μ est une mesure de probabilité diffuse, i.e. $\forall x \in E,\ \mu(\{x\}) = 0$. Déterminer les atomes de μ, i.e. les $A \in \mathcal{A}$ tels que $\mu(A) > 0 \Rightarrow \forall B \subset A,\ \mu(B) = 0$ ou $\mu(A \setminus B) = 0$. En déduire que μ est purement atomique (i.e. E est l'union d'atomes de μ). Que dire dans le cas de la mesure de Lebesguee sur $\mathbb{R}$?